我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

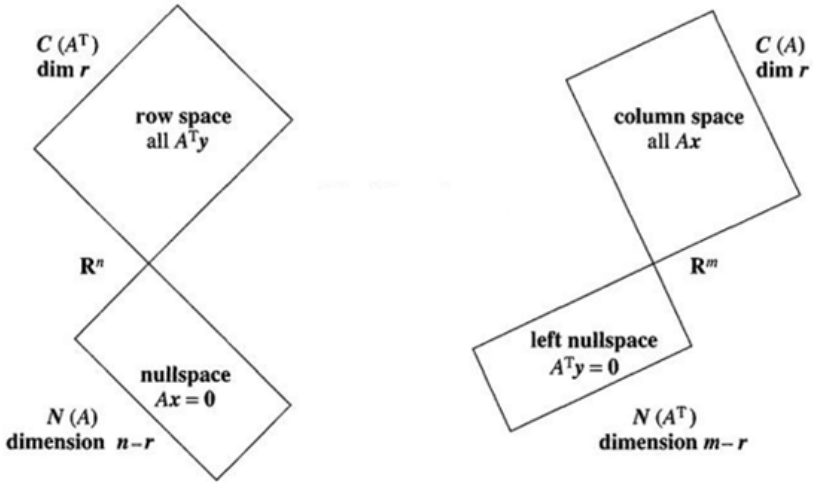
积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记34——左右逆和伪逆

原文 | https://mp.weixin.qq.com/s/PRQQvSfmipxPBeF80aEQ1A

一个矩阵有逆矩阵的前提是该矩阵是一个满秩的方阵。然而很多时候遇到的都是长方矩阵，长方矩阵是否有类似的逆矩阵呢？

先把4个基本子空间的图贴上，**A**是m×n的矩阵，其中r是矩阵的秩：



两侧逆（2-sided inverse）

我们通常说的逆矩阵都是针对满秩方阵而言，此时$AA^{-1} = I = A^{-1}A$，**A**左乘或右乘A^{-1}的结果都是单位矩阵，所以将这种逆矩阵称为两侧逆。

左逆（Left inverse）

如果**A**是一个m×n的列满秩矩阵，意味着**A**的各列线性无关，**A**的秩和列数相等，r = n，但**A**可能存在更多的行，m ≥ n，此时**A**的零空间只有零向量，并且**Ax** = **b**有唯一解（m = n时）或无解（m > n时）。

对于列满秩矩阵来说，对称矩阵A^TA是一个n×n的满秩方阵，因此A^TA可逆，此时：

$$\underbrace{(A^TA)^{-1}A^T}_{A_{left}^{-1}}A = I$$

$$A_{left}^{-1} = (A^TA)^{-1}A^T, \qquad A_{left}^{-1}A = I$$

我们称A^{-1}_{left}为**A**的左逆，是一个n×m的矩阵，左逆也是讨论最小二乘问题的核心。

右逆（Right inverse）

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

如果**A**是一个m×n的行满秩矩阵，意味着**A**的各行线性无关，**A**的秩和行数相等，r = m，但**A**可能存在更多的列，m ≤ n。**A**的左零空间只有零向量，**A**的零空间是n - r维，因此有n – r个自由变量，当n > m时，**Ax** = **b**有无数解。

对于行满秩矩阵来说，对称矩阵$\mathbf{AA}^{\mathbf{T}}$是一个m×m的满秩方阵，因此$\mathbf{AA}^{\mathbf{T}}$可逆，此时：

$$\underbrace{A\,A^{\mathrm{T}}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1}}_{A_{\mathrm{right}}^{-1}} = I$$

$$A_{\mathrm{right}}^{-1} = A^{\mathrm{T}}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \qquad AA_{\mathrm{right}}^{-1} = I$$

通常来说，右乘左逆得不到单位矩阵，仅在m = n时才有$\mathbf{AA}^{-1}_{\mathrm{left}} = \mathbf{I}$。对于列满秩的m×n矩阵来说，$\mathbf{AA}^{-1}_{\mathrm{left}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$，**P**是**A**的列空间的投影矩阵。同理，左乘右逆也得不到单位矩阵，$\mathbf{A}^{-1}_{\mathrm{right}}\mathbf{A}$是**A**的行空间的投影矩阵。

示例 找出A的右逆：

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{\mathrm{right}}^{-1} = A^{\mathrm{T}}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad \left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{\mathrm{right}}^{-1} = A^{\mathrm{T}}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\\ 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

$$AA_{\mathrm{right}}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\\ 1/2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

Numpy的pinv函数可以求得右逆：

```
1 import numpy as np
2
3 A = np.mat('1 0 1; 0 1 0')
4 print(np.linalg.pinv(A))
```

```
[[0.5 0. ]
 [0.  1. ]
 [0.5 0. ]]
```

伪逆（Pseudoinverse）

逆矩阵可看作矩阵的逆操作，向量**x**在**A**的作用下变成了了**Ax**，**Ax**通过$\mathbf{A}^{-1}$又得到**x**：

$$x \xrightarrow{A} Ax$$

$$x \xleftarrow{A^{-1}} Ax$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU

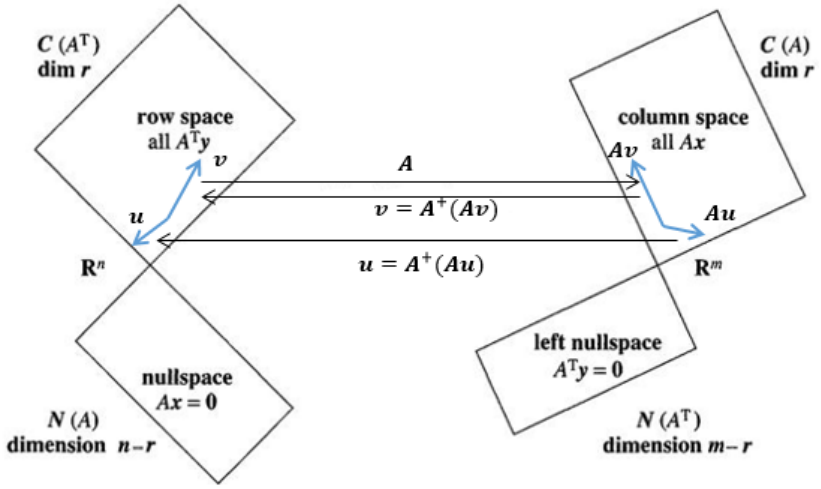
方阵**A**是否可逆和是否存在零空间有关，可逆矩阵的零空间和左零空间都只有零向量。零空间的向量是满足**Ax** = **0**的所有**x**，假设**A**存在零空间，那么对于零空间的非零向量来说：

$$x \xrightarrow{A} Ax = 0$$

此时**A**的各列的线性组合是**0**，这意味着**A**的列是线性相关的，**A**一定不是满秩的，**A**是奇异矩阵，**A**不可逆。

列满秩矩阵的零空间只有零向量，有左逆矩阵；行满秩矩阵的左零空间只有零向量，有右逆矩阵。但是对于不满秩的矩阵**A**m×n（r < n, r < m）来说，两个零空间都存在，此时它无法得到左逆或右逆。

假设**A**m×n是不满秩的矩阵，其行空间和列空间的维数相等。如果此时行空间的一个向量**x**，经过**A**的变换，变为列空间的向量**Ax**，并且**x**和**Ax**是一一对应的（如果行空间的两个向量**u** ≠ **v**，则**Au** ≠ **Av**），那么在把逆操作限制在行空间和列空间上时，**A**是可以进行逆操作的，**A**在这两个空间上的逆矩阵称为伪逆，记作$\mathbf{A}^+$：



这里的关键是**x**和**Ax**是一一对应的，如果行空间的两个向量**u** ≠ **v**，则**Au** ≠ **Av**，只有这样，逆操作才成立。为什么会有一一对应？

u和**v**是行空间的两个不同的向量，经过**A**的转换将变成列空间的另外两个向量**Au**和**Av**。我们假设**Au** = **Av**，这相当于**Au** − **Av** = **0**，即**A**(**u** − **v**) = **0**，这意味着**u** − **v**属于零空间。但**u**和**v**是行空间的两个向量，它们的线性组合也属于行空间，与结论矛盾，因此假设不成立，**Au** ≠ **Av**。行空间和列空间的向量是一一对应的。

统计学家非常需要伪逆矩阵，因为他们经常使用最小二乘求解线性回归问题。统计学家经常做一些试验，并用矩阵**A**记录这些试验结果（每个结果有多个属性值），如果试验存在大量重复的结果，那么**A**将可能不是列满秩的，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$不可逆，无法用过去的方法解决最小二乘。此时伪逆就有了用武之地。怎样找出伪逆呢？

找出伪逆

$\mathbf{A}_{m\times n}$是一个不满秩矩阵，行数和列数都大于秩，m > r, n > r，找出$\mathbf{A}^+$的一个方法是利用奇异值分解。**A**的奇异值分解是：

$$A = U\sum V^{T}$$

∑是一由奇异值构成的对角矩阵：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

∑和**A**的尺寸一致，也是m×n矩阵，它的秩是r，显然也是一个不可逆矩阵，并且$\sum^{T}\sum$和$\sum\sum^{T}$都不可逆，也就是说∑也不存在左逆或右逆，只有伪逆：

$$\Sigma^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{\sigma_r} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}$$

$\sum^{+}$是一个n×m矩阵，它的秩仍然是r。伪逆是最接近逆的：

$$\Sigma\Sigma^{+} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}, \quad \Sigma^{+}\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

U和$\mathbf{V^{T}}$都是正交矩阵，其逆矩阵等于转置，$(\mathbf{V^{T}})^{-1}$=**V**, $\mathbf{U^{-1}} = \mathbf{U}^{T}$，**A**的伪逆为：

$$A^{+} = V\sum^{+}U^{T}$$

$$AA^{+} = U\sum V^{T}V\sum^{+}U^{T} = U\sum\sum^{+}U^{T}$$

值得注意的是，$\mathbf{AA^{+}}$得到的并不是像$\sum\sum^{+}$这样对角线上只有1和0的矩阵，而是**A**的行空间的投影矩阵。

伪逆的性质

伪逆满足4个性质：

$$AA^{+}A = A$$

$$A^{+}AA^{+} = A^{+}$$

$$AA^{+} = (AA^{+})^{T}$$

$$A^{+}A = (A^{+}A)^{T}$$

综合示例

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$,**A**是否可逆？是否有左逆、右逆或伪逆？

A的行列式是0，**A**是一个奇异矩阵，故**A**没有逆矩阵。

A既不是行满秩也不是列满秩，故**A**没有左逆或右逆，只有伪逆。

用奇异值分解求解**A**的伪逆，先对**A**进行奇异值分解**A**=**UΣV**$^{\mathrm{T}}$。

先求得**AA**$^{\mathrm{T}}$的特征值：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25 & 50\\ 50 & 100\end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix}25-\lambda & 50\\ 50 & 100-\lambda\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ or } \lambda = 125$$

只有一个正的特征值125，对应的奇异值和奇异值矩阵是：

$$\sigma = \sqrt{125}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sqrt{125} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

接下来根据根据特征方程求得**AA**$^{\mathrm{T}}$的特征向量：

$$\text{when } \lambda = 0 \text{ then } (\boldsymbol{A}-\lambda)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\text{when } \lambda = 125 \text{ then } (\boldsymbol{A}-\lambda)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

U是标准化后的特征向量矩阵：

$$\boldsymbol{U} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

用同样的方法求得**A**$^{\mathrm{T}}$**A**的特征值和特征向量，进而求得**V**。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{T}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{125} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 6\\ 6 & -8\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{+} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{125} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{V}\Sigma^{+}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}8 & 6\\ 6 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{125} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}8 & 6\\ 6 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/25 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{25}\begin{bmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{bmatrix}$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号 “我是8位的”

随笔

分类: 线性代数

标签: 左逆, 右逆, 伪逆

好文要顶 关注我 收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

2 推荐 0 反对

« 上一篇： 线性代数笔记33——基变换和图像压缩
» 下一篇： 贝叶斯决策理论（1）

posted on 2019-12-19 21:59 我是8位的 阅读(6977) 评论(0) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告
yozodcs.com
永中DCS，文档在线预览处理专家
10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐
了解详情

编辑推荐：
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻：
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes